# Opción A

## Ejercicio 1 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Dada la función f : R → R definida por $f(x) = (x + 1)/(e^x)$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

**Solución**

Los puntos de inflexión verifican que $f''(x) = 0$, después tendremos que estudiar el signo de la 2ª derivada a izquierda y derecha de ellos. Si cambia el signo, sí es punto de inflexión.

$f(x) = (x + 1)/(e^x)$,

$f'(x) = [e^x - e^x(x + 1)]/(e^{2x}) = (- x)/e^x$ ,

$f''(x) = [-e^x - (-x)e^x]/(e^{2x}) = (x - 1)/e^x$,

De $f''(x) = 0$, tenemos $(x - 1)/e^x = 0$, de donde x = 1 (posible punto de inflexión)

Como $f''(0) = -1/e^0 < 0$ y $f''(2) = 1/e^2 > 0$, x = 1 es punto de inflexión.

La recta tangente en x = 1 es $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$f(x) = (x + 1)/(e^x)$, de donde $f(1) = 2/e$

$f'(x) = (- x)/e^x$, de donde $f'(1) = -1/e$

La recta tangente es $y - (2/e) = (-1/e)(x - 1)$

## Ejercicio 2 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

Sean f : R → R y g : R → R las funciones definidas mediante

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{y} \quad g(x) = 3x - 6$$

(a) [0'75 puntos] Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

**Solución**

(a)

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación f(x) = g(x) es decir $x^3 - 4x = 3x - 6$. Pasándolo a un miembro nos queda

$x^3 - 7x + 6 = 0$. Obtenemos una solución por Ruffini

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | -7 | 6 |
| 1 | | 1 | 1 | -6 |
| | 1 | 1 | -6 | 0 |

Tenemos como solución x = 1. Resolviendo la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, obtenemos x = 2 y x = -3

(b)

Como f(x)= y g(x) se cortan en x = -3, x = 1 y x = 2, el área encerrada por ambas funciones es:

El área pedida es $\left|\int_{-3}^{1}(f(x)-g(x))dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(f(x)-g(x))dx\right| = \left|\int_{-3}^{1}(x^3-7x+6)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3-7x+6)dx\right| =$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right]_{1}^{2}\right| = |(1/4 - 7/2 + 6) - (81/4 - 63/2 - 18)| +$$

$+ |(16/4 - 28/2 + 12) - (1/4 - 7/2 + 6)| = |32| + |-3/4| = 32 + ¾ = 131/4\ u^2$

## Ejercicio 3 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$x + y = 1$$
$$ky + z = 0$$
$$x + (k + 1)y + kz = k + 1$$

(a) [1'25 puntos] Determina el valor del parámetro k para que sea incompatible.

(b) [1'25 puntos] Halla el valor del parámetro k para que la solución del sistema tenga z = 2.

**Solución**

$$x + y = 1$$
$$ky + z = 0$$
$$x + (k + 1)y + kz = k + 1$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 1 & k+1 & k & k+1 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea incompatible rango(A) $\neq$ rango($A^*$).

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k \end{vmatrix} = (1)(k^2 - k - 1) - (1)(-1) = k^2 - k.$

Resolvemos $|A| = 0$, es decir $k^2 - k = 0$, de donde $k = 0$ y $k = 1$.

*Si* $\boldsymbol{k \neq 0}$ ***y*** $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$ *, tenemos $|A| \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango($A^*$) = 3, y por el teorema de Rouche el sistema es compatible y determinado y tiene solución única.*

Si $\boldsymbol{\lambda = 0}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En $A^*$ como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, porque dos filas son iguales, tenemos rango($A^*$) = 2

*Como rango(A)= 2 = rango($A^*$), por el teorema de Rouche el sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.*

Si $\boldsymbol{\lambda = 1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos rango(A) = 2

En $A^*$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) = 2 \neq 0$, tenemos rango($A^*$) = 3

*Como rango(A)= 2 $\neq$ rango($A^*$) = 3, por el teorema de Rouche el sistema es incompatible, y no tiene solución.*

(b)

Resolvemos el sistema forzando z = 2

$$x + y = 1$$
$$ky + 2 = 0$$
$$x + (k + 1)y + 2k = k + 1$$

Tenemos tres ecuaciones con dos incógnitas, por tanto para que el sistema tenga solución el determinante de la matriz ampliada $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k+1 & 1-k \end{pmatrix}$ tiene que ser 0.

$|B^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 1 & k+1 & 1-k \end{vmatrix}_{3^a+2^a(-1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + 2k = 0$, de donde $k = 0$ y $k = 2$

Como en el apartado (a) hemos que el sistema era incompatible para k = 0, sólo nos queda la solución **k = 2**.

**Ejercicio 4 de la Opción A del Modelo 4 de Sobrantes de 2008**

Considera la recta r definida por $\begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$ y la recta s definida por $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) [1 punto] Estudia la posición relativa de r y s.
(b) [1'5 puntos] Halla la ecuación general de un plano que contiene a s y es paralelo a r.

**Solución**

(a)
Tomamos de cada recta un punto y un vector director, para lo cual pongo ambas ecuaciones en paramétricas.

$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$, tomando y = λ, sus ecuaciones paramétricas son $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 3 - 3\lambda \end{cases}$

De la recta r, un punto es A(0,0,3) y un vector director **u** = (0,1,-3)

$s \equiv \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$, tomando x = μ, sus ecuaciones paramétricas son $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \\ z = -3 + 2\mu \end{cases}$

De la recta s, un punto es B(0,0,-3) y un vector director **v** = (1,0,2)
Como **u** ≠ m**v**¸es decir los vectores directores no son proporcionales, las rectas r y s se cortan o se cruzan.
Si det(**AB,u,v**) = 0, las rectas se cortan en un punto
Si det(**AB,u,v**) ≠ 0, las rectas se cruzan.
**AB** = (0,0,-6)

Como det(**AB,u,v**) = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ = - 6(- 1) = 6 ≠ 0, las rectas se cruzan.

(b)
Como el plano contiene a la recta s, tomo como punto para el plano el B(0,0,-3) y un vector el **v** = (1,0,2). Como el plano es paralelo a la recta s, el otro vector paralelo independiente para el plano es **u** = (0,1,-3).

La ecuaciones paramétricas del plano son $\begin{cases} x = 0 + 1.\lambda + 0.\mu \\ y = 0 + 0.\lambda + 1.\mu \\ x = -3 + 2.\lambda - 3.\mu \end{cases} = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ x = -3 + 2.\lambda - 3.\mu \end{cases}$, con λ, μ ∈ $\Re$

La ecuación general del plano es det(**BX,u,v)** = 0 = 2x – 3y – z – 3 = 0

## Opción B

### Ejercicio 1 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

Sea la función f : [0, 4] → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

(a) [2 puntos] Determina a, b y c sabiendo que f es continua en el intervalo cerrado [0, 4], derivable en el intervalo abierto (0, 4) y que f(0) = f(4).
(b) [0'5 puntos] ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?

**Solución**

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } 0 \le x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Como f(x) es continua en [0, 4], es continua en x = 2, es decir $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} (cx + 1) = 2c + 1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$

Igualando tenemos la ecuación **2c + 1 = 4 + 2a + b**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ c & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \end{cases}$$

Como es derivable en (0,4), es derivable x = 2, luego f '$(2^+)$ = f '$(2^-)$

$$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2} (2x + a) = 4 + a$$

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2} (c) = c$$

Igualando tenemos la ecuación **4 + a = c**

Como f(0) = f(4), tenemos **b = 4c + 1**

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2c + 1 = 4 + 2a + b \\ c = 4 + a \\ b = 4c + 1 \end{cases}$, obtenemos a = - 3, b = 5 y c = 1, por tanto la función pedida es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{si} \quad 0 \le x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \end{cases} \quad \text{y su derivada} \quad f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \end{cases}$$

(b)

Veamos donde f '(x) = 0, es decir 2x – 3 = 0, de donde x = 3/2.

Lo que nos han preguntado es que se calcule los valores de a, b y c para que f(x) verifique el Teorema de Rolle y el punto donde lo cumple.

## Ejercicio 2 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Calcula $\int_0^1 x.\ln(x+1)dx$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

### Solución

Calculamos primero la integral indefinida, que es una integral por partes ($\int udv = uv - \int vdu$)

$$\int x\ln(x+1)dx = \begin{cases} u = \ln(x+1) \to du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = xdx \to v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases} = \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}I_1$$

La integral $I_1 = \int \frac{x^2}{x+1}dx$, es una integral racional. Dividimos primero

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x + 1 \\ \cline{2-2} -x^2 - x & x - 1 \\ \hline -x & \\ x + 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{x+1}dx = \int \left( x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

La integral indefinida es
$$I = \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}I_1 = \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\left( \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2}$$

Por tanto $\int_0^1 x.\ln(x+1)dx = \left[ \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} \right]_0^1$ = [ (1/2)ln(2) – 1/4 + 1/2 - (1/2)ln(2) ] – (0) = 1/4

## Ejercicio 3 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008

[2'5 puntos] Halla los valores del parámetro m que hacen compatible el sistema de ecuaciones:

$$-x + 2y - 2z = 2$$
$$2x + y + z = m$$
$$x + 3y - z = m$$

**Solución**

$$-x + 2y - 2z = 2$$
$$2x + y + z = m$$
$$x + 3y - z = m$$

(a)

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & m \\ 1 & 3 & -1 & m^2 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible tiene que ser rango(A) = rango($A^*$).

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, por lo menos rango(A) = 2

En A como $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a+1^a(2) \\ 3^a+1^a(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque dos filas son iguales, tenemos rango(A) = 2

En $A^*$ para que el rango sea 2, el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix}$ tiene que ser 0.

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a+1^a(2) \\ 3^a+1^a(1) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4+m \\ 0 & 5 & 2+m^2 \end{vmatrix} = -5(m^2 + 2 - 4 - m) = -5(m^2 - m - 2)$.

Resolviendo la ecuación $m^2 - m - 2 = 0$, obtenemos m = - 1 y m = 2.

Para **m = - 1 y m = 2**, el sistema dado es compatible.

**Ejercicio 4 de la Opción B del Modelo 4 de Sobrantes de 2008**

[2'5 puntos] Sea la recta r definida por $\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

y sean los planos $\pi_1$, de ecuación x + y + z =0, y $\pi_2$, de ecuación y + z = 0. Halla la recta contenida en el plano $\pi_1$, que es paralela al plano $\pi_2$ y que corta a la recta r.

**Solución**

Como la recta pedida s está contenida en el plano $\pi_1$, y es paralela al plano $\pi_2$, su vector director **v** tiene que ser a la vez perpendicular al vector normal del plano $\pi_1$, $\mathbf{n_1}$ = (1,1,1) y al vector normal del plano $\pi_2$, $\mathbf{n_2}$ = (0,1,1). Es decir **v** es el producto vectorial de los vectores $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$.

**v** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = **i** (0) – **j**(1) + **k**(1) = (0, -1, 1)

La recta pedida es de la forma $s \equiv \begin{cases} x = a \\ y = b - \lambda \\ z = c + \lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \Re$ y A(a,b,c) un punto de ella que vamos a determinar.

Como "s" corta a "r", verifica su ecuación, es decir

x = 1 = a, de donde **a = 1**

x = y, es decir 1 = b - λ, de donde **b = 1 + λ**

por tanto la recta es por ahora $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda + \lambda = \\ z = c + \lambda \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = c + \lambda \end{cases}$, es decir **b = 1**, y además como la recta está contenida en el plano $\pi_1$, verifica su ecuación, es decir x + y + z =0, en nuestro caso 1 + 1 + c + λ = 0, de donde c = - 2 - λ.. Sustituyendo este valor en la z de la recta, tenemos z = - 2 - λ + λ = - 2, por tanto **c = -2**, el punto de la recta es A(a,b,c) = A(1,1,-2) y la recta pedida es $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ con $\lambda \in \Re$